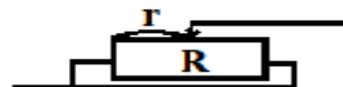


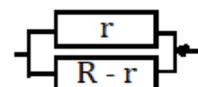
**Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе
ведомственных образовательных организаций
в 2021-2022 учебном году
9 класс
Очный тур. Вариант 1.**

Задача 1. (15 баллов). Для схемы включения реостата с сопротивлением R нарисовать график зависимости общего сопротивления R_0 от сопротивления r левой (по рисунку) части реостата (до движка).



Решение: Нарисуем так называемую эквивалентную схему, соответствующую схеме, данную в условии задачи.

Эквивалентная схема (см. рис.) – это схема, составленная из двух параллельно включенных резисторов с указанными сопротивлениями. Их общее (результатирующее) сопротивление R_0 равно



$$R_0 = R_0(r) = \frac{(R - r)r}{(R - r) + r} = \frac{Rr - r^2}{R}.$$

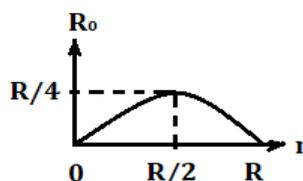
Таким образом, общее (результатирующее) сопротивление R_0 есть функция переменной r $R_0(r)$. Исследуем эту функцию.

Область определения функции (область изменения переменной r): $0 \leq r \leq R$.

$$R_0(r = 0) = R_0(r = R) = 0.$$

Аналитическое выражение функции $R_0(r)$ есть квадратичная парабола (выпуклая вверх), проходящая через начало координат ($r=0$). Вершина параболы находится в точке $r=R/2$. Значение функции в этой точке $R_0(r=R/2)=R/4$.

Нарисуем требуемый график



Ответ: $R_0 = \frac{Rr - r^2}{R}.$

Задача 2. (15 баллов). В некотором тепловом процессе (в котором участвует идеальный газ) объем газа зависит от температуры по закону $V = \alpha T^2$ ($\alpha = \text{const}$). Найти отношение η конечного давления к начальному ($\eta = P_{\text{к}}/P_{\text{н}}$) в результате проведенного процесса, если занимаемый газом объем увеличился в k раз.

Решение: Запишем уравнение состояния идеального газа.

$$PV = \nu RT.$$

Отсюда получаем:

$$P_{\text{нач. (кон)}} = \frac{\nu RT_{\text{нач. (кон)}}}{V_{\text{нач. (кон)}}} = \frac{\nu R \sqrt{V_{\text{нач. (кон)}}}}{\sqrt{\alpha} V_{\text{нач. (кон)}}}.$$

Последнее преобразование в последнем выражении получено с учетом условия задачи ($V = \alpha T^2$). Искомая величина η с использованием последнего выражения (и с учетом второго условия задачи $V_{\text{к}}/V_{\text{н}} = k$) равна

$$\eta = \frac{P_{\text{к.}}}{P_{\text{н.}}} = \sqrt{\frac{V_{\text{нач.}}}{V_{\text{кон.}}}} = \sqrt{1/k} = k^{-1/2}.$$

Ответ: $\eta = k^{-1/2}$.

Задача 3. (15 баллов). Тело бросили вертикально вверх. Через промежуток времени $\Delta t = 1$ с скорость тела уменьшилась в $k = 2$ раз. На какую максимальную высоту H поднимется тело?

Решение: Скорость тела при движении вверх с начальной скоростью v_0 меняется по закону

$$v(t) = v_0 - gt.$$

Через промежуток времени Δt скорость тела уменьшится в k раз и станет равной

$$v(\Delta t) = v_0 - g\Delta t = v_0/k.$$

Отсюда найдем начальную скорость v_0

$$v_0 = \frac{g\Delta tk}{k-1}.$$

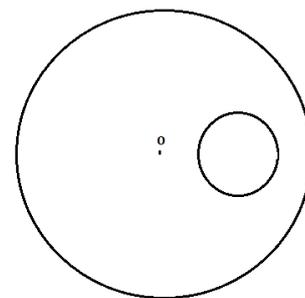
Максимальная высота подъема тела H определяется по хорошо известной формуле

$$H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

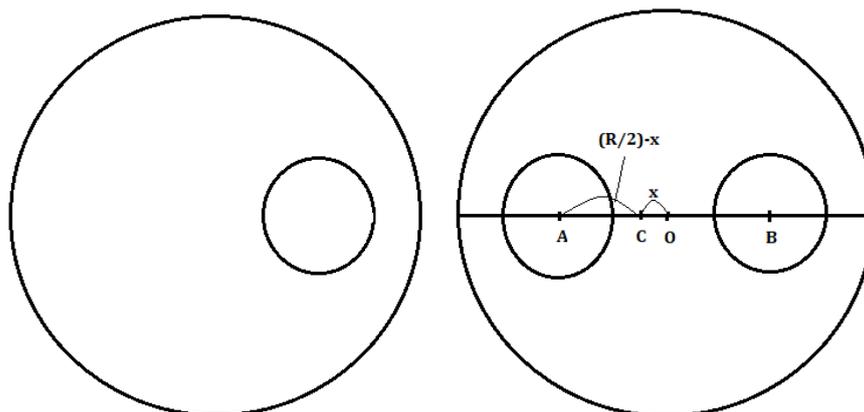
Подставив в последнее выражение v_0 , получим ответ.

Ответ: $H = \frac{g(\Delta t)^2 k^2}{2(k-1)^2} = 2g(\Delta t)^2 = 19.8 \text{ м.}$

Задача 4. (25 баллов). Из однородного диска радиуса R вырезали круглое отверстие радиуса r ($r < R/2$) как показано на рисунке. Центр вырезанного отверстия находится на расстоянии $R/2$ от центра диска. Определить положение центра масс полученного изделия относительно центра диска O .



Решение: Ниже дадим два рисунка – исходный (с лева) и рабочий (для решения задачи).



На рабочем рисунке вырезанное круглое отверстие радиуса r – отверстие с центром в точке «В». Точка «О» - центр диска. Через центр диска O и центр отверстия B проведем диаметр диска. На построенном диаметре построим окружность радиуса r с центром в точке «А» на расстоянии OA ($OA=OB$). После проведенных геометрических построений нашу задачу можно переформулировать: определить положение центра масс системы двух однородных симметричных тел – однородного диска с двумя симметричными отверстиями (с центром масс в точке «О») и однородного диска радиуса r с центром масс в точке «А». Искомый центр масс «С» системы тел находится на построенном диаметре между точками «А» и «О». Расстояния от центра масс C до центра масс диска с двумя симметричными вырезами (X) и центра масс диска радиуса r с центром масс в точке «А» ($R/2-x$) указаны на рисунке.

Тогда выполняется соотношение центров масс:

$$x(M - m^*) = \left(\frac{R}{2} - x\right)m^*,$$

где m^* - масса диска радиуса r , $M - m^*$ - масса большого диска с двумя симметричными вырезами.

Разберемся с массами симметричных тел. Пусть масса исходного изделия (диска с отверстием) равна m . Введем поверхностную плотность масс исходного изделия σ :

$$\sigma = \frac{m}{\pi(R^2 - r^2)}$$

Тогда масса диска радиуса r с центром масс в точке «А» будет равна:

$$m^* = \sigma \pi r^2 = \frac{mr^2}{R^2 - r^2}.$$

Масса большого диска с двумя симметричными вырезами равна:

$$M - m^* = m \frac{R^2 - 2r^2}{R^2 - r^2}.$$

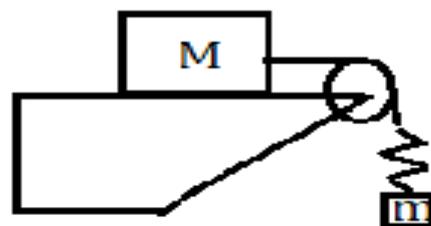
Теперь воспользуемся формулой соотношения центров масс, подставив в неё полученные данные:

$$x m \frac{R^2 - 2r^2}{R^2 - r^2} = \left(\frac{R}{2} - x\right) \frac{mr^2}{R^2 - r^2}$$

Мы получили уравнение относительно искомой в задаче величины x - центра масс полученного изделия относительно центра диска. Решая его, получим ответ.

Ответ: $x = \frac{Rr^2}{2(R^2 - r^2)}.$

Задача 5. (30 баллов). На горизонтальном столе покоится груз массы M . Коэффициент трения груза о стол μ . К грузу привязана невесомая и нерастяжимая нить, переброшенная через невесомый блок. К нити прикреплена невесомая пружина жесткости k . Какой массы m груз надо прикрепить к свободному концу нерастянутой пружины, чтобы, падая, он смог сдвинуть груз массы M с места?



Решение: Из-за невесомости блока сила натяжения нити F всегда равна силе упругости пружины $F_{уп}$. Последняя максимальна при максимальном удлинении ΔL пружины. При этом груз массы m опустится по высоте на расстояние $h = \Delta L$. Запишем закон сохранения полной механической энергии E системы трех тел (обоих грузов и пружины).

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0.$$

Здесь: $\Delta T = 0$ - приращение кинетической энергии тел; $\Delta U_1 = -mgh$ - приращение потенциальной энергии груза массы m ; $\Delta U_2 = \frac{\mu h^2}{2}$ - приращение потенциальной энергии пружины. С учетом вышесказанного закон сохранения полной механической энергии E системы трех тел будет приведен к виду

$$mgh = \frac{\mu h^2}{2}.$$

Отсюда находится h - максимально необходимое опускание (по высоте) груза массы m (необходимое для такого растяжения пружины, чтобы сдвинуть груз массы M с места)

$$h = \frac{2mg}{\mu}.$$

Чтобы сдвинуть груз массы M с места, необходимо чтобы сила натяжения нити F (равная силе упругости пружины $F_{уп.} = \mu h$) превзошла максимальную силу трения покоя ($F_{\text{макс. тр. пок.}} = F_{\text{тр. скол.}} = \mu Mg$) груза массы M о стол

$$\mu h > \mu Mg.$$

Подставляя в последнее выражение h , получаем ответ.

Ответ: $m > \frac{M\mu}{2}.$